4A.1 গামা ফাংশন (Gamma function) *[NUMF-87, 90, 91, 92, 97 NUH-05, 08; NUH(Phy)-03, 05, 06, 07, 12; DUH-80, 86, 89 90, 91, 03, 04, 05; RUH-89; CUH-84, 85, 86]*

অপ্রকৃত যোগজ $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx;\ n>0$ কে গামা ফাংশন বা দ্বিতীয় অয়লারিয়ান যোগজ বলা হয় এবং একে $\Gamma(n)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx;\ n>0$$

$n>0$ এর জন্য $\Gamma(n)$ অভিসারী এবং $n<0$ এর জন্য $\Gamma(n)$ অপসারী। $\Gamma(n)$ এর ডোমেন $=\{n\in\mathbb{R}:n>0\}$

উপপাদ্য-1: $\Gamma(1)=1$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx;\ n>0$

$$\Rightarrow\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}x^0dx=\int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$=-[e^{-x}]_0^\infty=-[e^{-\infty}-e^0]=-(0-1)=1$$

$$\therefore\Gamma(1)=1$$

4A.2 গামা ফাংশনের আবর্ত সূত্র (Recurrence formula for Gamma function)

উপপাদ্য-2: $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ **অথবা,** $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$ *[NUMF-00]*

প্রমাণ: গামা ফাংশনের সংজ্ঞা হতে পাই, $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx;\ n>0$ (1)

.....

Scanned with CamScanner

এখন সমীকরণ (1) এ n এর পরিবর্তে $n+1$ বসিয়ে পাই,

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n+1-1}dx=\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$$

$$=-\left[\Gamma n\right]_0^\infty+n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx \quad \text{[অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন ব্যবহার করে]}$$

$$=0+n\Gamma n=n\Gamma n \quad \therefore \Gamma(n+1)=n\Gamma n$$

অথবা, $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$

4A.3 গামা ফাংশন এবং ফ্যাক্টরিয়াল ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between Gamma function and Factorial function)

উপপাদ্য-3: $\Gamma(n+1)=n!$, যেখানে $n\in\mathbb{N}$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\Gamma(n+1)=n\Gamma n$ (1)

এখন সমীকরণ (1) এ ক্রমান্বয়ে n এর পরিবর্তে $n-1,n-2,n-3,\cdots,4,3,2,1$ বসিয়ে পাই,

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1);\ \Gamma(n-1)=(n-2)\Gamma(n-2);$$

$$\Gamma(n-2)=(n-3)\Gamma(n-3);\cdots;\Gamma(5)=4\Gamma(4);\ \Gamma(4)=3\Gamma(3);$$

$$\Gamma(3)=2\Gamma(2);\ \Gamma(2)=1\Gamma(1)$$

উল্লিখিত মানগুলোর সাহায্যে (1) হতে পাই,

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$=\ldots\quad\ldots\quad\ldots=n(n-1)n(n-2)\cdots 3.2.1\Gamma(1)=n! \quad \left[\because \Gamma(1)=1\right]$$

উপপাদ্য-4: $\dfrac{\Gamma(n)}{k^n}=\int_0^\infty e^{-kx}t^{n-1}dx;\ k,n>0$

প্রমাণ: গামা ফাংশনের সংজ্ঞা হতে পাই, $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt;\ n>0$

$$=\int_0^\infty e^{-kx}(kx)^{n-1}kdx \quad \left|\begin{array}{l}\text{ধরি, } t=kx \\ \therefore dt=kdx\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}\text{সীমা}: t=0\Rightarrow x=0 \\ t\to\infty\Rightarrow x\to 0\end{array}$$

$$=k^n\int_0^\infty e^{-kx}x^{n-1}dt \quad \therefore \frac{\Gamma(n)}{k^n}\int_0^\infty e^{-kx}x^{n-1}dt$$

উপপাদ্য-5: $\Gamma(n)=2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2x-1}dx;n>0$

প্রমাণ: গামা ফাংশনের সংজ্ঞা হতে পাই, $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt;n>0$

$$=\int_0^\infty e^{-x^2}\left(x^2\right)^{n-1}2xdx \quad \left|\begin{array}{l}\text{ধরি, } t=x^2\Rightarrow dt=2xdx \\ \text{সীমা}: t=0\Rightarrow x=0 \\ t\to\infty\Rightarrow x\to\infty\end{array}\right.$$

$$=2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx$$

$$\therefore \Gamma(n)=2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx$$

Scanned with CamScanner

উপপাদ্য-6: $\Gamma(n) = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}}dx; n>0$

প্রমাণঃ গামা ফাংশনের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt; n>0$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}}\frac{1}{n}dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}}dx$$

$$\therefore \Gamma(n) = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}}dx$$

ধরি, $t^n = x$ .....(1)

$\Rightarrow t = x^{1/n}$

$(1) \Rightarrow nt^{n-1}dt = dx \Rightarrow t^{n-1}dt = \frac{1}{n}dx$

সীমা: $t=0 \Rightarrow x=0$

$t\to\infty \Rightarrow x\to\infty$

উপপাদ্য-7: $\Gamma(n) = \int_0^1\left(ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx$

প্রমাণঃ গামা ফাংশনের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt; n>0$$

$$= \int_1^0\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}(-dx)$$

$$= \int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx$$

$$\therefore \Gamma(n) = \int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx$$

ধরি, $e^{-t} = x \cdots (1)$

$\Rightarrow \frac{1}{e^t} = x \Rightarrow e^t = \frac{1}{x} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$(1) \Rightarrow e^{-t}dt = dx$

সীমা: $t=0 \Rightarrow x=1$

$t\to\infty \Rightarrow x\to 0$

উপপাদ্য-8: $\int_0^1 x^m\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(1+m)^{n+1}}$

প্রমাণঃ ধরি, $I = \int_0^1 x^m\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n dx$

$$= \int_\infty^0\left(e^{-t}\right)^m(t)^n\left(-e^{-t}\right)dt$$

$$= \int_0^\infty t^n e^{-(1+m)t}dt \ldots\ldots (2)$$

ধরি, $x = e^{-t} \cdots (1)$ সীমা : $x=0 \Rightarrow t=\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = e^t \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = t \quad x=1 \Rightarrow t=0$

$(1) \Rightarrow dx = -e^{-t}dt$

আবার ধরি, $(1+m)t = y$

$$\Rightarrow t = \frac{y}{1+m} \Rightarrow dt = \frac{dy}{1+m}$$

সীমা : $t=0 \Rightarrow y=0$

$t\to\infty \Rightarrow y\to\infty$

Scanned with CamScanner

$$\therefore (2) \Rightarrow I = \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+m}\right)^n .e^{-y} \frac{dy}{1+m} = \frac{1}{(1+m)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-y} .y^n dy$$

$$= \frac{1}{(1+m)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-y} .y^{n+1-1} dy = \frac{\Gamma(n+1)}{(1+m)^{n+1}}$$

$$\therefore \int_0^1 x^m \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(1+m)^{n+1}}$$

উপপাদ্য-9: $\int_0^1 x^m \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(1+m)^{n+1}}$

প্রমাণ: উপপাদ্য-8 এর অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যাবে।

Scanned with CamScanner

$$2\Gamma\left(\frac{\quad}{2}\right)$$

উপপাদ্য-19: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^n}dx = \frac{\pi}{2\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}}$, যেখানে [where] $0 < n < 1$

প্রমাণঃ আমরা জানি, $\frac{\Gamma(n)}{x^n} = \int_0^\infty e^{-xt}t^{n-1}dt$; যেখানে x ধ্রুবক।

$$\Rightarrow \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-xt}t^{n-1}dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^n}dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xt}t^{n-1}\sin x\,dx\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\left[\frac{e^{-xt}}{t^2+1}(-t\sin x-\cos x)\right]_0^\infty t^{n-1}dt$$

.....

Scanned with CamScanner

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{t^2+1} dt$$

ধরি, $t^2 = u$
$\Rightarrow 2tdt = du$
$\Rightarrow 2\sqrt{u}dt = du$
$\Rightarrow dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

সীমা : $t = 0 \Rightarrow u = 0$ এবং $t = \infty \Rightarrow u = \infty$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{1+u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{1+u} du$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{1+u} du = \frac{1}{2\Gamma(n)} \frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2}}; \quad \left[\because \int \frac{y^{n-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}}$$

উপপাদ্য-20: $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}}; \quad 0 < n < 1$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\frac{\Gamma(n)}{x^n} = \int_0^\infty e^{-xt} t^{n-1} dt$; যেখানে x ধ্রুবক।

$$\Rightarrow \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{n-1} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^n} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xt} t^{n-1} \cos x \, dx \, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt}}{t^2+1}(-t\cos x + \sin x)\right]_0^\infty t^{n-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{t.t^{n-1}}{t^2+1} dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{t^n}{t^2+1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n}{2}}}{1+u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{1+u} du$$

ধরি, $t^2 = u$
$\Rightarrow 2tdt = du$
$\Rightarrow 2\sqrt{u}dt = du$
$\Rightarrow dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

সীমা : যখন $t = 0 \Rightarrow u = 0$ এবং $t = \infty \Rightarrow u = \infty$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{1}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n+1}{2}-1}}{1+u} du$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(n)} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi}; \quad \left[\because \frac{y^{n-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}}; \quad \left[\because \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta\right]$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}}$$

Scanned with CamScanner CamScanner